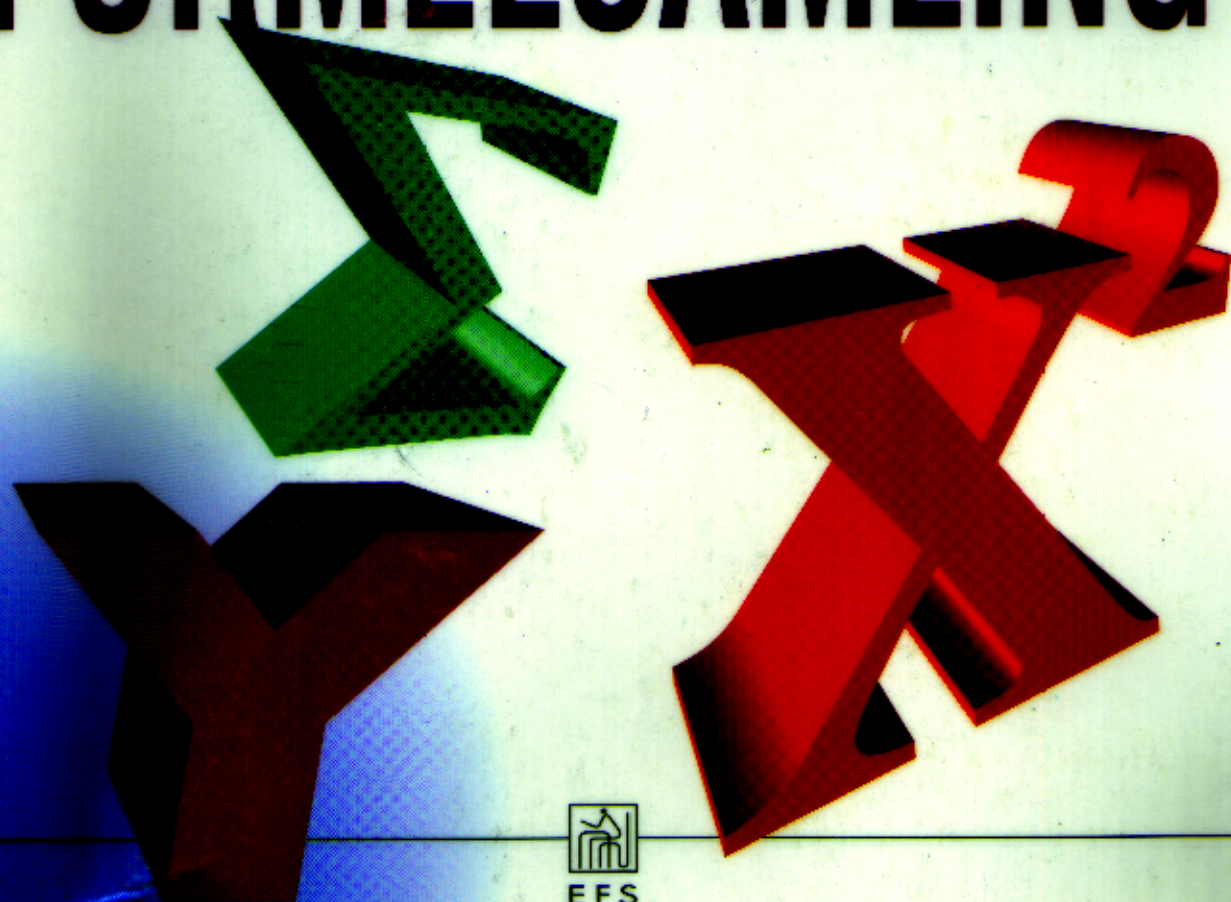


P. Madsen

TEKNISK MATEMATIK

FORMELSAMLING



EFS

Teknisk matematik - formelsamling

3. udgave af

Udvidet matematisk formelsamling

ERHVERVSSKOLERNES FORLAG 1994

FORORD

Denne formelsamling er udarbejdet med baggrund i lærebøgerne Teknisk matematik I og II og er 3. udgave af Udvidet matematisk formelsamling.

I 3. udgave er titlen ændret til Teknisk matematik - formelsamling. Der er foretaget enkelte rettelser og tilføjelser i forhold til 2. udgave.

Formelsamlingen er ikke udarbejdet til en bestemt uddannelse, men med henblik på bred anvendelse inden for de grundlæggende uddannelser, TX-enkeltfagskurser, HTX-uddannelsen og de videregående teknikeruddannelser.

Lærebøgerne Teknisk matematik I og II har følgende indhold:

Teknisk matematik I: Tal og algebra, praktisk usikkerhedsvurdering, ligninger, geometri, koordinatsystemet, trigonometri, cirkelberegninger, overflader og udfoldninger, rumfangsberegninger, analytisk plangeometri.

Teknisk matematik II: Vektorregning, uligheder, trigonometriske ligninger og uligheder, funktioner, grænseværdier, asymptoter, differentialregning, maksimering og minimering, funktionsundersøgelse, integralregning, differentialligninger, vektorfunktioner.

Formelsamlingen indeholder et uddrag af de vigtigste definitioner, regneregler og formler fra lærebøgerne, og formelsamlingen bliver herved et hurtigt opslagsværk.

August 1994
Preben Madsen

Indhold

Tal og algebra.....	5
Ligninger	8
Geometri.....	9
Trigonometri	12
Cirkelberegninger	15
Overflader	16
Rumfangsformler	18
Guldins regler	20
Plangeometri.....	21
Vektorregning	24

Intervaller	27
Grænseværdier	27
Funktioner.....	28
Differentialregning	31
Funktionsundersøgelse.....	33
Integralregning.....	35
Differentialligninger	38
Vektorfunktioner	38
Matematiske tegn og symboler	40

TAL OG ALGEBRA

$$a + b = c$$

$$a + b = b + a$$

$$a + (b + c) = a + b + c$$

$$a - b = c$$

$$a - (b + c) = a - b - c$$

$$a \cdot b = c$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$a(b - c) = ab - ac$$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$a : b = c$$

$$\frac{a}{b} = c$$

Addition

Sum

Addender

Addendernes orden er ligegyldig.

En parentes med fortegn + kan haves og sættes uden at leddenes fortegn ændres.

Subtraktion

Differens

Subtrahend

Minuend

En parentes med fortegn kan haves, når leddene i parentesen ændrer fortegn.

Multiplikation

Produkt

Faktorer

Faktoreernes orden er ligegyldig.

Regneregler

"Tre vigtige formler"

Division - Brøkregning

Kvotient

Divisor

Dividend

Tæller

Kvotient

Nævner

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$$

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n} = \frac{a+b+c}{n}$$

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$$

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

$$a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$$

$$0^n = 0$$

$$a^1 = a$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$

$$(a^p)^q = a^{p \cdot q}$$

$$\sqrt[n]{a} = b, \quad \text{når } b^n = a$$

Regneregler

Potens

Grundbegreber

Regneregler for potenser

Rod

Grundbegreber

$$\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$m \cdot p \sqrt[n]{a^{n \cdot p}} = m \sqrt[n]{a^n}$$

$$m \sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = m \cdot n \sqrt[n]{a}$$

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{når } a \geq 0 \\ -a, & \text{når } a < 0 \end{cases}$$

Regneregler for rodstørrelser

Numerisk værdi

LIGNINGER

$$a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1$$

$$a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1$$

$$x = \frac{D_x}{D}; \quad y = \frac{D_y}{D};$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{Hvis } b^2 - 4ac = 0$$

$$\text{Hvis } b^2 - 4ac > 0$$

$$\text{Hvis } b^2 - 4ac < 0$$

2 ligninger med 2 ubekendte

Determinant-metoden

2.-grads ligning

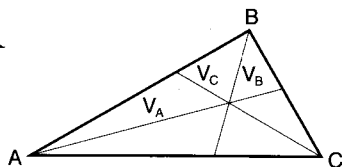
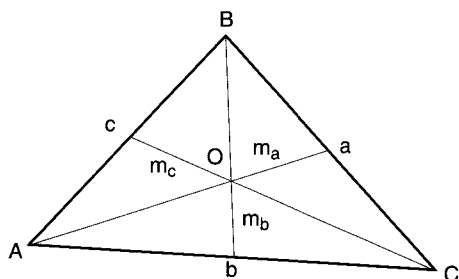
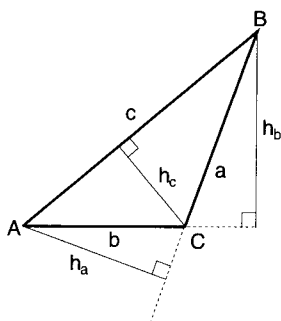
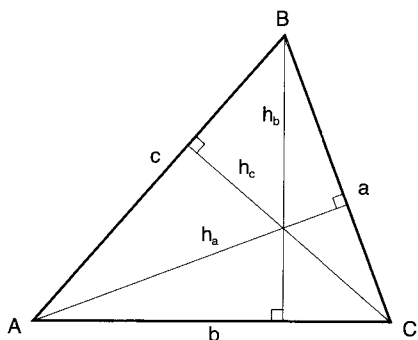
Den ordnede 2.-grads ligning har løsningsformlen

Een løsning - en dobbeltrod

To rødder

Ingen rødder

GEOMETRI



Trekanter

Højder i en trekant og areal af trekant.

En højde udgår fra en vinkelspids og står vinkelret på den modstående side eller dennes forlængelse.

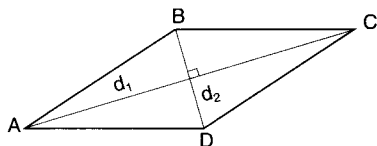
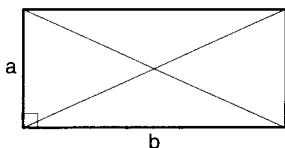
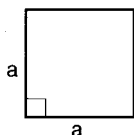
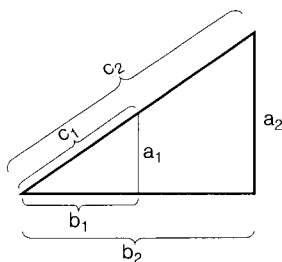
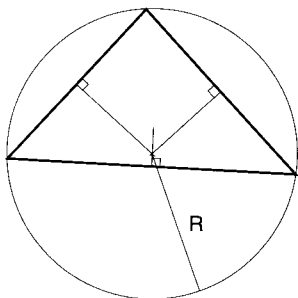
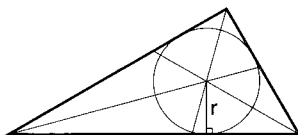
$$\text{Areal} = \frac{1}{2} \cdot h_a \cdot a = \frac{1}{2} \cdot h_b \cdot b = \frac{1}{2} \cdot h_c \cdot c$$

Medianer i en trekant

En median forbinder en vinkelspids med den modstående sides midtpunkt. Medianerne skærer hinanden i samme punkt O (trekantens arealtungdepunkt), og endvidere deler de hinanden i forholdet 1:2.

Vinkelhalveringslinjer i en trekant

En vinkelhalveringslinje halverer en af trekantens vinkler. Vinkelhalveringslinjerne skærer hinanden i samme punkt.



Trekantens indskrevne cirkel

Vinkelhalveringslinjernes skæringspunkt er centrum for trekantens indskrevne cirkel.

Trekantens omskrevne cirkel

Midtnormalernes skæringspunkt er centrum for trekantens omskrevne cirkel.

Ensvinklede trekanter

For ensvinklede trekanter gælder, at forholdene mellem ensliggende sider er lige store.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Firkanter

Kvadrat

Alle vinkler er rette, og alle sider er lige lange.

$$\text{Areal} = a \cdot a = a^2$$

Rektangel

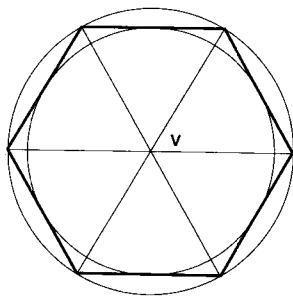
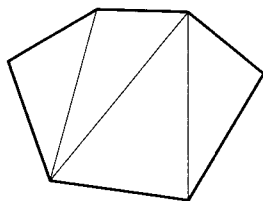
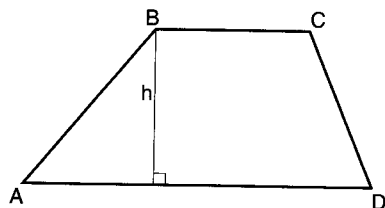
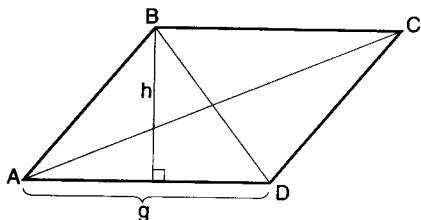
Alle vinkler er rette. Diagonalerne er lige lange og halverer hinanden.

$$\text{Areal} = a \cdot b.$$

Rombe

Alle sider er lige lange. De modstående vinkler er lige store. Diagonalerne halverer hinanden, står vinkelret på hinanden og halverer rombets vinkler.

$$\text{Areal} = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$$



Parallelogram

De modstående sider er parallelle og lige lange.
De modstående vinkler er lige store. Diagonalerne halverer hinanden.

$$\text{Areal} = g \cdot h$$

Trapez

I et trapez er to sider parallelle.

$$\text{Areal} = \left(\frac{BC + AD}{2} \right) \cdot h$$

Vilkårlige polygoner

En vilkårlig n-kant kan inddeles i $n - 2$ trekanter.

$$\text{Vinkelsummen} = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

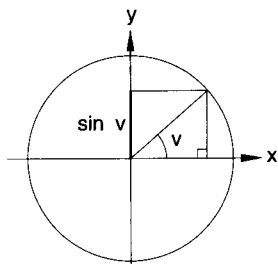
Regulære polygoner

En regulær polygon er en n-kant med lige store sider og lige store vinkler.

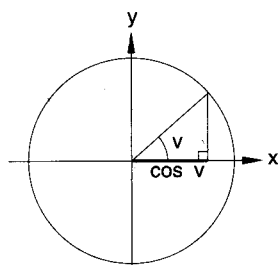
Alle regulære polygoner har en indskreven og en omskreven cirkel. Forbindes centrum med polygonens vinkelspidser fremkommer n ligebenede trekanter.

$$v = \frac{360^\circ}{n}$$

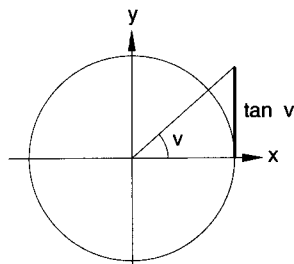
TRIGONOMETRI



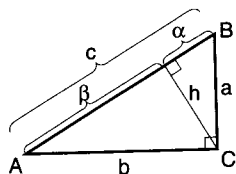
$\sin v$



$\cos v$



$\tan v$



Definitioner og grundformler

$$\cos^2 v + \sin^2 v = 1$$

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}$$

Den retvinklede trekant

$$\sin v = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hypotenusen}}$$

$$\cos v = \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}}$$

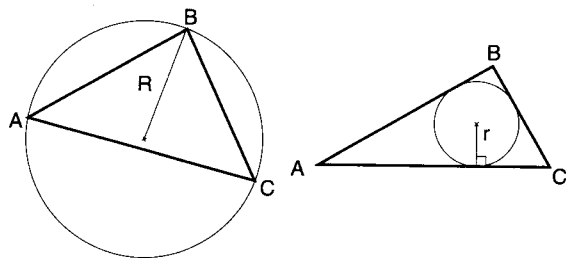
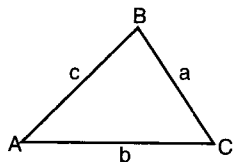
$$\tan v = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hosliggende katete}}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \alpha + \beta$$

$$h^2 = \alpha \cdot \beta$$

$$\text{Areal} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot c = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$



Den vilkårlige trekant

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$

$$\text{Areal} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C$$

$$\text{Areal} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot R}$$

$$\text{Areal} = r \cdot s$$

$$\text{Areal} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

R: Radius i trekantens omskrevne cirkel

r: Radius i trekantens indskrevne cirkel

Additionsformlerne

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

Formler for den dobbelte vinkel

$$\sin 2a = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$= 1 - 2 \cdot \sin^2 a$$

$$= 2 \cdot \cos^2 a - 1$$

$$\tan 2a = \frac{2 \cdot \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

Trigonometriske funktioner (svingninger)

$$f(t) = a \sin \omega t$$

a: amplitude

ω : vinkelhastighed i radian/sekund

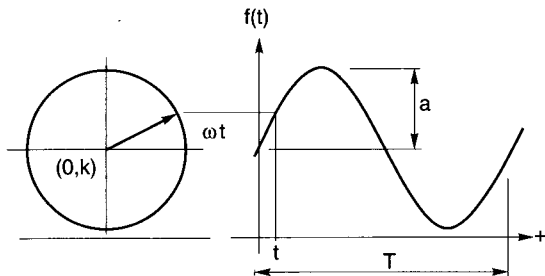
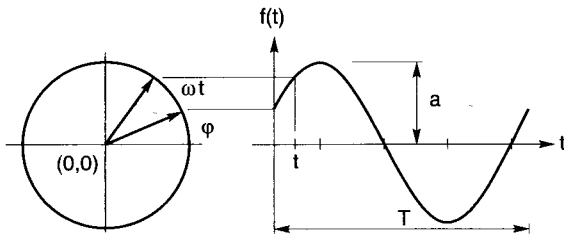
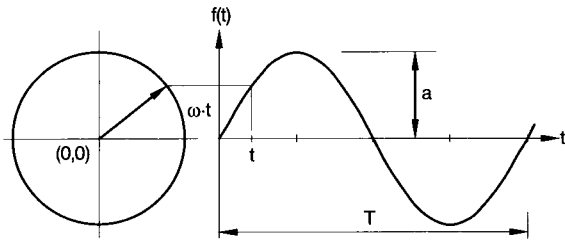
t: tid i sekunder

Periodetid:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ (sekunder)}$$

Frekvens:

$$f = \frac{1}{T} \text{ (Hz)}$$



$$f(t) = a \sin (\omega t + \varphi),$$

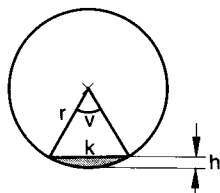
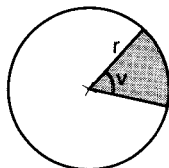
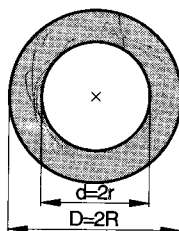
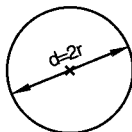
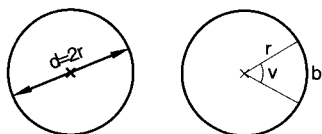
hvor φ kaldes faseforskydningen.

(vektoren danner til tiden $t = 0$ vinklen φ med vandret).

$$f(t) = a \sin \omega t + k,$$

som er en svingning, der er forskudt konstanten k i y-aksens retning.

CIRKELBEREGNINGER



Omkreds - Buelængde

Omkredsen $O = \pi \cdot d = 2 \cdot \pi \cdot r$

$$b = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{360^\circ} \cdot v, \text{ hvor } v \text{ er målt i } ^\circ.$$

Arealer

Cirkel

$$A = \pi \cdot r^2 = \frac{\pi}{4} \cdot d^2$$

Cirkelring

$$A = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 - \frac{\pi}{4} \cdot d^2$$

Cirkeludsnit

$$\text{Areal} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot v}{360^\circ}, \text{ hvor } v \text{ er målt i } ^\circ.$$

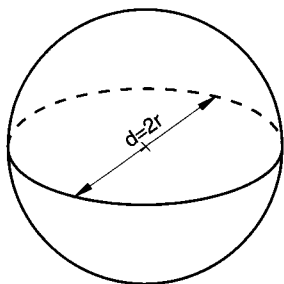
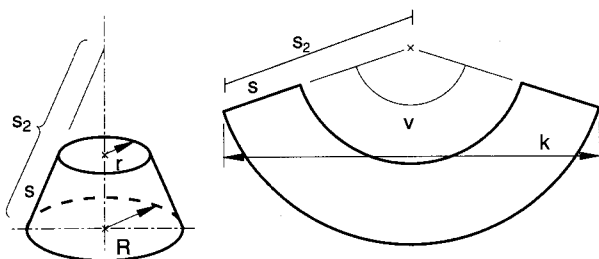
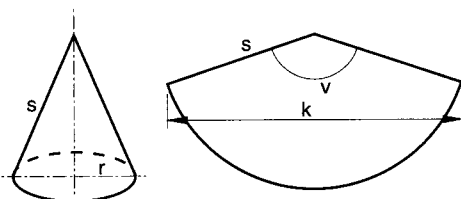
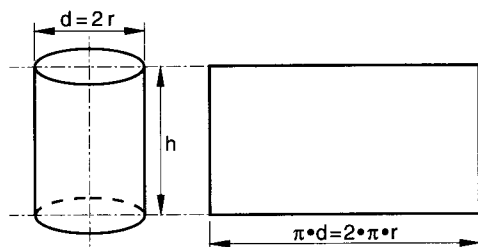
Cirkelafsnit

$$\text{Areal} = \frac{r^2}{2} \cdot \left(\frac{\pi \cdot v}{180^\circ} - \sin v \right), \text{ hvor } v \text{ er målt i } ^\circ.$$

$$\text{Korde: } k = 2 \cdot r \cdot \sin \frac{v}{2}$$

$$\text{Pilhøjde: } h = r \left(1 - \cos \frac{v}{2} \right)$$

OVERFLADER



Cylinder

Arealet af den krumme overflade af en cylinder:

$$A = \pi \cdot d \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

Kegle

Arealet af den krumme overflade af en kegle:

$$A = \pi \cdot r \cdot s$$

Vinklen $v = \frac{360^\circ \cdot r}{s}$, hvor v er målt i $^\circ$.

$$\text{Korden } k = 2 \cdot s \cdot \sin \frac{v}{2}$$

Keglestub

Arealet af den krumme overflade af en keglestub:

$$A = \pi \cdot s \cdot (R + r)$$

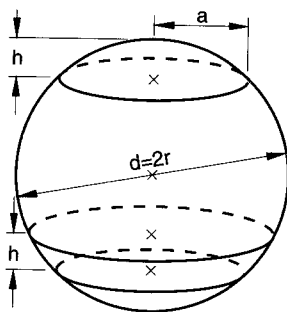
Vinklen $v = \frac{360^\circ \cdot R}{s_2}$, hvor v er målt i $^\circ$.

$$\text{Korden } k = 2 \cdot s_2 \cdot \sin \frac{v}{2}$$

Kugle

Overfladearealet af en kugle:

$$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = \pi \cdot d^2$$



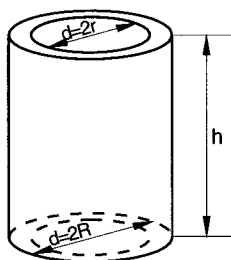
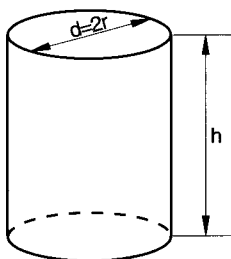
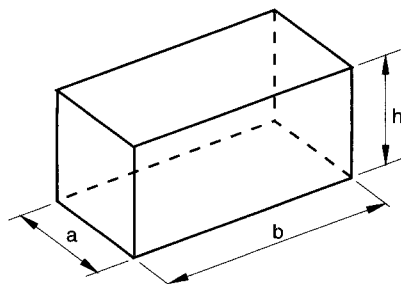
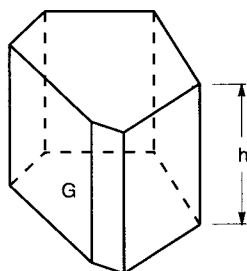
**Overfladearealet af en kuglekalot
(krumme overflade)**

$$A = \pi \cdot d \cdot h = \pi (a^2 + h^2)$$

**Overfladearealet af en kugleskive
(krumme overflade)**

$$A = \pi \cdot d \cdot h$$

RUMFANGSFORMLER



Retvinklet prisme

$$V = G \cdot h$$

G = arealet af grundfladen

Kasse

$$V = a \cdot b \cdot h$$

Cylinder

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h$$

Cylinderrør

$$V = (\pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2) \cdot h$$

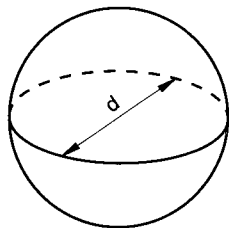
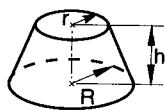
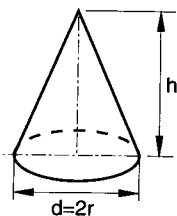
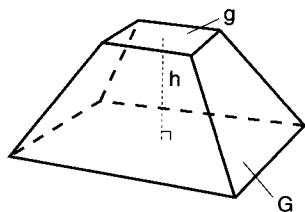
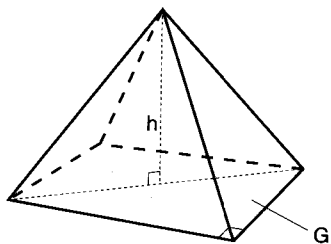
$$V = \left(\frac{\pi}{4} \cdot D^2 - \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \right) \cdot h$$

D = ydre diameter

R = ydre radius

d = indre diameter

r = indre radius



Pyramide

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

G = arealet af grundfladen

Pyramidestub

$$V = \frac{1}{3} \cdot h(G + g + \sqrt{G \cdot g})$$

Kegle

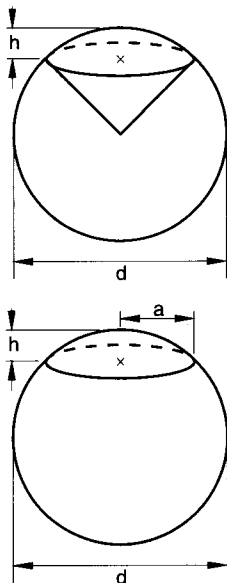
$$V = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot h = \frac{\pi}{12} \cdot d^2 \cdot h$$

Keglestub

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot h \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r)$$

Kugle

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{\pi}{6} \cdot d^3$$



Kugleudsnit

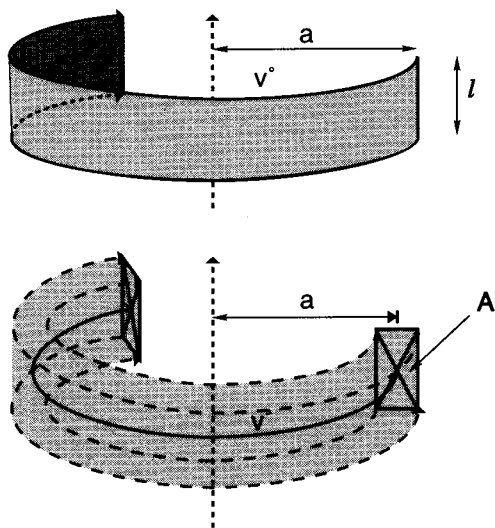
$$V = \frac{\pi}{6} \cdot d^2 \cdot h$$

Kugleafsnit

$$V = \frac{\pi}{6} \cdot h^2 \cdot (3 \cdot d - 2 \cdot h)$$

$$V = \frac{\pi}{6} \cdot h \cdot (3 \cdot a^2 + h^2)$$

GULDINS REGLER



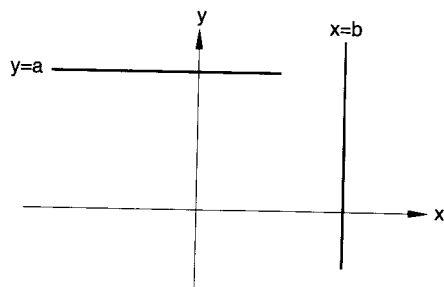
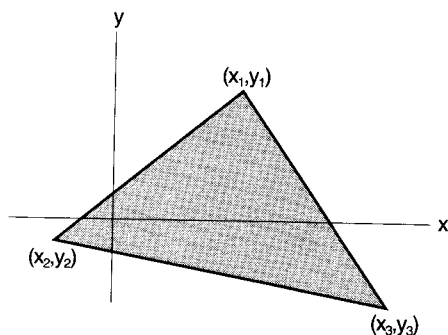
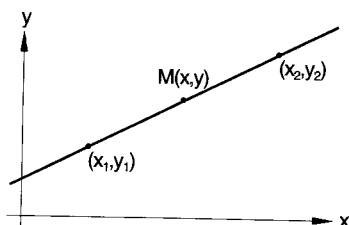
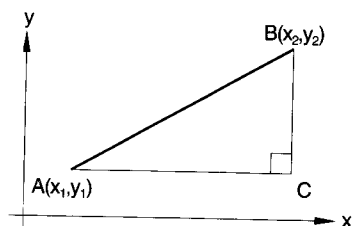
Bestemmelse af overfladeareal

$$A = 2 \cdot \pi \cdot a \cdot l \cdot \frac{v}{360^\circ}$$

Bestemmelse af rumfang

$$V = 2 \cdot \pi \cdot a \cdot A \cdot \frac{v}{360^\circ}$$

PLANGEOMETRI



Afstandsformlen

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Midtpunkt på linjestykke

$$M(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Areal af trekant - Determinantformlen

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} | x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_3 + x_3 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_1 - x_3 \cdot y_2 - x_1 \cdot y_3 |$$

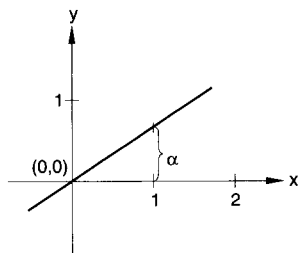
Rette linjer

Vandret linje gennem punktet (0,a)

$$y = a$$

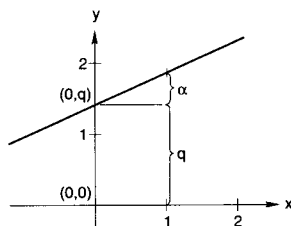
Lodret linje gennem punktet (b,0)

$$x = b$$



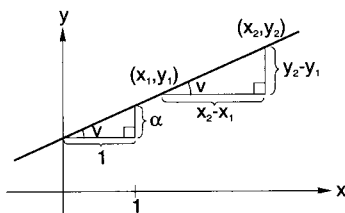
Ret linje med stigningstal α , som går gennem punkterne (0,0) og (1, α)

$$y = \alpha \cdot x$$



Ret linje, som går gennem punkterne (0,q) og (1, $\alpha + q$)

$$y = \alpha \cdot x + q$$



Ret linje med stigningstal α , som går gennem punktet (x1, y1)

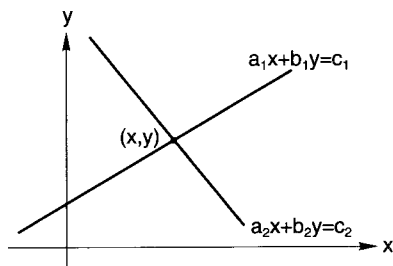
$$y - y_1 = \alpha \cdot (x - x_1)$$

Forhold mellem stigningstal, vinkel mellem vandret og linjen og to punkter

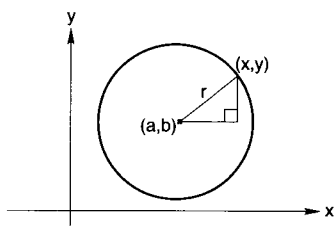
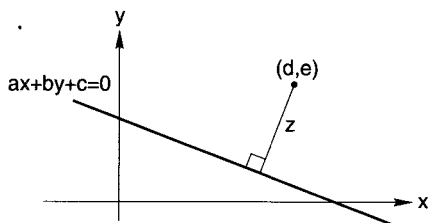
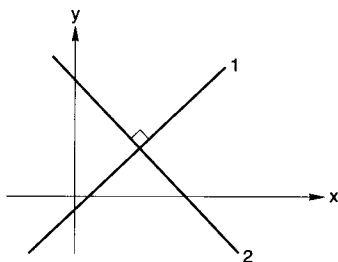
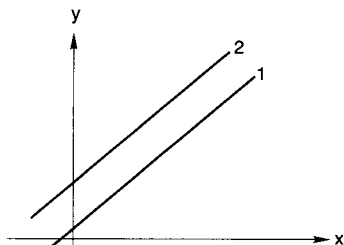
$$\alpha = \tan v = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Skæringspunkt mellem to linjer

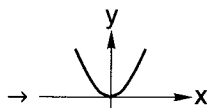
$$a_1x + b_1y = c_1 \quad \text{og} \quad a_2x + b_2y = c_2$$



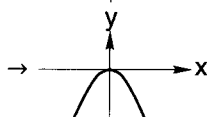
$$(x,y) = \left(\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \right)$$



Er a positiv, vender
parablens ben opad



Er a negativ, vender
parablens ben nedad



Parallelle linjer

Når to linjer har samme stigningstal, er de parallelle.

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

Linjer der står vinkelret på hinanden

Når produktet af to linjers stigningstal er -1, står de vinkelret på hinanden.

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = -1$$

Afstand fra punkt (d,e) til ret linje

$$ax + by + c = 0$$

$$z = \frac{|ad + be + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Cirkelns centrumligning

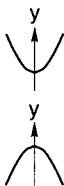
Centrum er (a,b) og radius = r

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

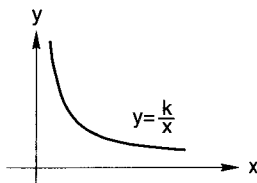
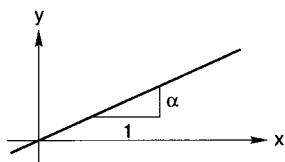
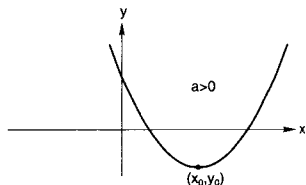
Parabel med symmetri omkring $x = 0$ og topunkt i (0,0)

$$y = ax^2$$

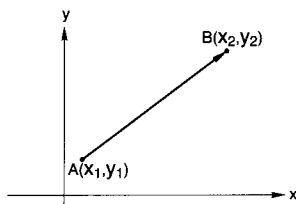
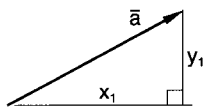
Er a positiv, vender
parablens ben opad



Er a negativ, vender
parablens ben nedad



VEKTORREGNING



**Parabel med symmetri omkring $x = 0$ og top-
punkt i $(0, y_0)$**

$$y = ax^2 + y_0$$

**Parabel med symmetri omkring $x = x_0$ og top-
punkt i (x_0, y_0)**

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

Proportionalitet

Ligefrem proportionale størrelser

$$y = \alpha \cdot x$$

Omvendt proportionale størrelser

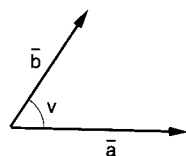
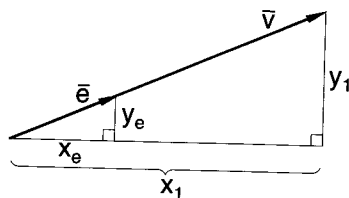
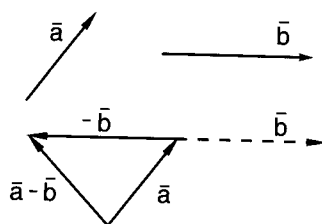
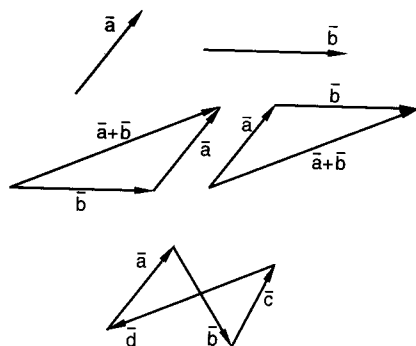
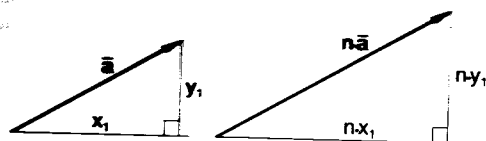
$$y = \frac{k}{x}$$

Vektorkoordinater

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Vektorkoordinater i et koordinatsystem

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$



Multiplikation af skalar med vektor

$$n \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} n \cdot x_1 \\ n \cdot y_1 \end{pmatrix}$$

Addition af to vektorer

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\text{Hvis } \vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ er } \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

Vektorer i ligevægt

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Subtraktion af vektorer

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

$$\text{Hvis } \vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ er } \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}$$

Enhedsvektor

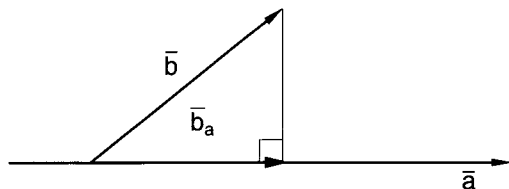
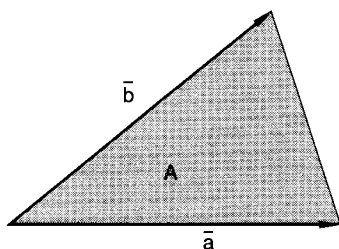
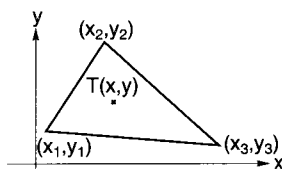
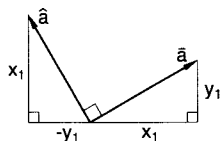
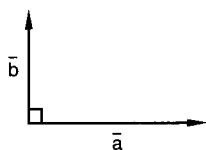
$$\vec{e} = \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$x_e = \frac{x_1}{|\vec{v}|} \quad y_e = \frac{y_1}{|\vec{v}|}$$

Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos v$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$



Skalarproduktet $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, når vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ står vinkelret på hinanden.

$$\cos v = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}, \quad \cos v = \vec{e}_a \cdot \vec{e}_b$$

Regneregler

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{d}$$

Tværvektor

$$\text{Hvis } \vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \text{ er } \hat{a} = \begin{pmatrix} -y_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Trekantens tyngdepunkt

$$T(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

Trekantens areal

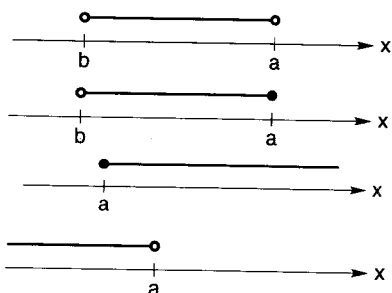
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |(x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1)|$$

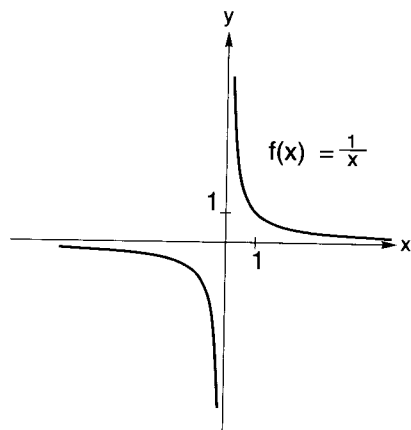
Projektion

$$|\vec{b}_a| = |\vec{b}| \cos v$$

INTERVALLER



GRÆNSEVÆRDIER



$$\{x \in \mathbb{R} \mid b < x < a\} =]b; a[$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid b < x \leq a\} =]b; a]$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} = [a; \infty[$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} =]-\infty; a[$$

Regneregler m.v. for grænseværdier

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{x} = +0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Når $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = F$ og $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = G$
gælder:

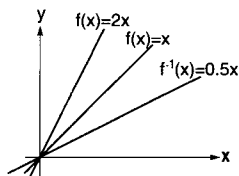
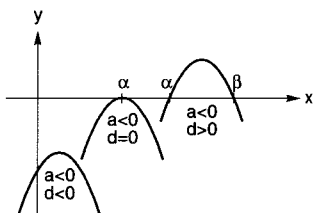
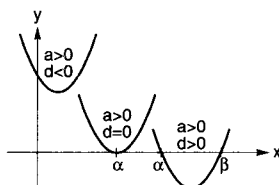
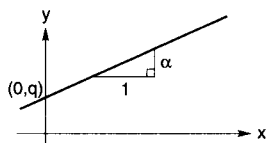
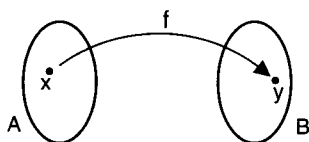
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = F + G$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) - g(x) = F - G$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = F \cdot G$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G}, \quad G \neq 0$$

FUNKTIONER



Definition på funktion

En funktion er en forskrift, hvor der til ethvert element x i en mængde A kan knyttes et og kun et element y i en mængde B .

A: Definitionsmængde

B: Værdimængde

Lineær funktion

$$f(x) = \alpha \cdot x + q$$

α : stigningstal/hældningskoefficient

q : konstantled

Funktioner af 2. grad (parabler)

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

kan omskrives til

$$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta),$$

hvis α og β er rødder i ligningen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Parablens toppunkt

$$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a} \right), \quad d = b^2 - 4ac$$

Sammensatte funktioner

$$\text{Eks.: } f(x) = 3x - 1 \text{ og } g(x) = -2x + 5$$

Den sammensatte funktion

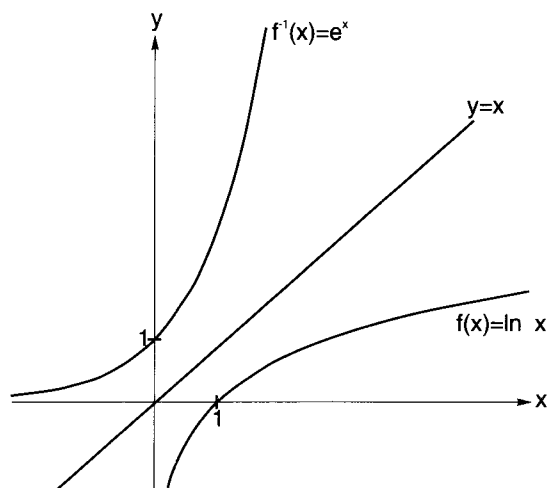
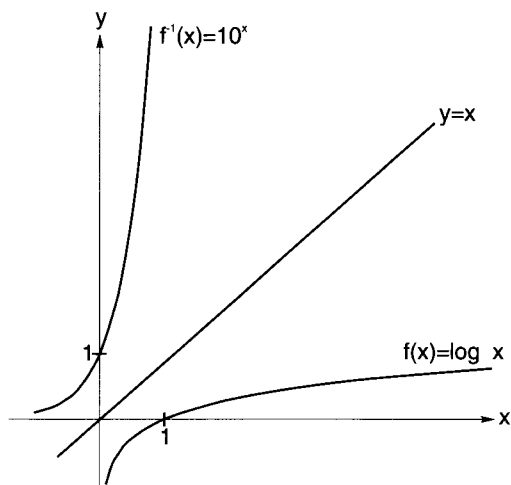
$$(f \circ g)(x) = 3(-2x + 5) - 1$$

Omvendte funktioner

$$\text{Eks.: } f(x) = 2x$$

Den omvendte funktion

$$x = 2y \text{ eller } f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$$



Funktioner af 3. grad:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a \neq 0$$

Hvis $x = \alpha$ er rod i ligningen

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

vil $(x - \alpha)$ gå op i polynomiet

$$ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Logaritmefunktioner

Titalslogaritmen $f(x) = \log x, x > 0$

$$\log 10 = 1$$

$$\log a \cdot b = \log a + \log b$$

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

$$\log a^n = n \cdot \log a$$

$$\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \log a$$

Den naturlige logaritme $f(x) = \ln x, x > 0$

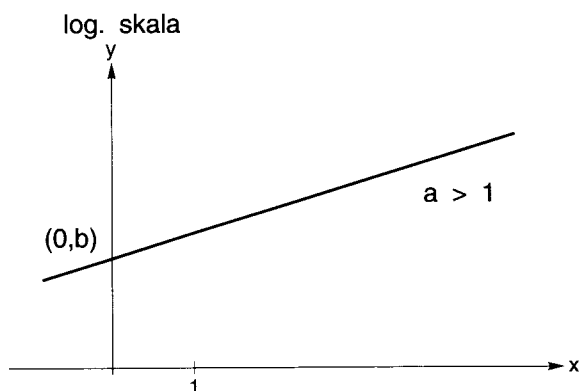
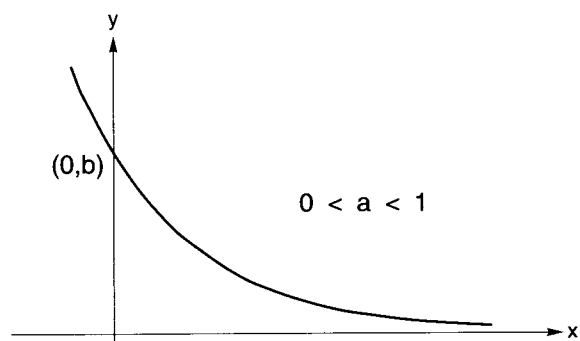
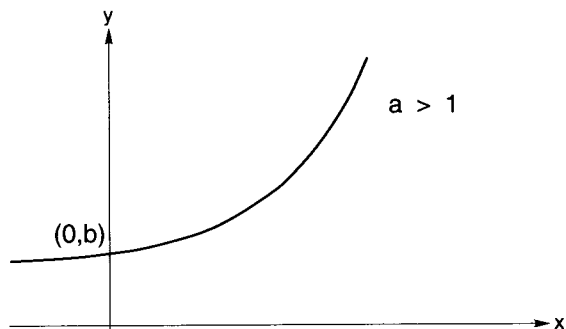
$$\ln e = 1$$

$$\ln a \cdot b = \ln a + \ln b$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln a^n = n \cdot \ln a$$

$$\ln \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \ln a$$



Ekspponentialfunktioner

$$f(x) = b \cdot a^x, \quad b > 0, \quad a > 0 \quad \text{og} \quad x \in \mathbb{R}$$

Fordoblingskonstant for eksponentielt voksende funktion:

$$T_2 = \frac{\log 2}{\log a}$$

Halveringskonstant for eksponentielt aftagende funktion:

$$T_{\frac{1}{2}} = -\frac{\log 2}{\log a}$$

Grafen for $f(x) = b \cdot a^x$ i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem.

DIFFERENTIALREGNING

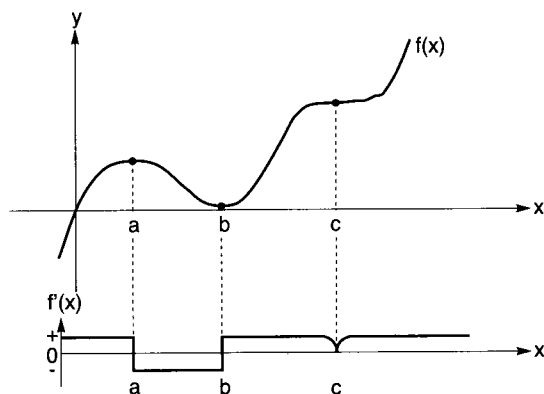
- konstant
- potensfunktion
- sum
- differens
- produkt
- brøk
- trigonometriske funktioner
- eksponentialfunktioner
- logaritmefunktioner

Symboler for differentialkvotient

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) = y'$$

Regneregler for bestemmelse af differentialkvotienter

Funktion $f(x)$	Differentialkvotient $f'(x)$
k	0
$k \cdot x$	k
$a \cdot x^n$	$n \cdot a \cdot x^{n-1}$
$u + v$	$u' + v'$
$u - v$	$u' - v'$
$u \cdot v$	$u' \cdot v + u \cdot v'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
a^x	$a^x \cdot \ln a $
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log x$	$\frac{1}{x \cdot \ln 10}$



Differentialkvotient af sammensat funktion

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

Implicit differentiation

Eks.: $x^2 + y^2 - 1 = 0$

$$\frac{dx^2}{dx} + \frac{dy^2}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{d1}{dx} = 0$$

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

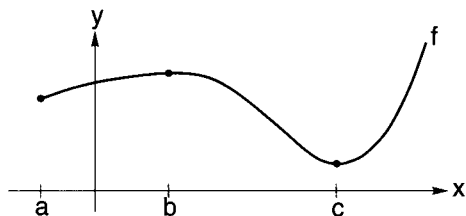
Bestemmelse af lokale maksimums- og lokale minimumspunkter samt vandrette vendepunkter

1. Løs ligningen $f'(x) = 0$
2. Fortegnsbestemmelse for $f'(x)$.
 - a) Lokalt maksimum forekommer, når fortegnet for $f'(x)$ går fra $+$ til $-$.
 - b) Lokalt minimum forekommer, når fortegnet for $f'(x)$ går fra $-$ til $+$.
 - c) Vandret vendetangent forekommer, når fortegnet for $f'(x)$ er $" + 0 + "$ eller $" - 0 - "$.
3. Beregning af $y_{\max}$ og $y_{\min}$ sker ved indsættelse af de fundne x -værdier i $f(x)$.

Bestemmelse af punkter for skrå vendetangenter

1. Løs ligningen $f''(x) = 0$
2. Beregning af y -værdi sker ved indsættelse af den fundne x -værdi i $f(x)$.

FUNKTIONS- UNDERSØGELSE



f er voksende i : $[a;b]$ og $[c;\infty[$
f er aftagende i : $[b;c]$

Ved en funktionsundersøgelse forstår man bestemmelse af det grafiske billede af en funktion. De karakteristiske egenskaber, som bør fastlægges er:

1. Definitionsmængden
2. Skæringspunkter med henholdsvis x- og y-aksen
3. Fortegnsbestemmelse af funktionen
4. Monotoniforhold
f er voksende i : $[a;b]$ og $[c;\infty[$
f er aftagende i : $[b;c]$

Lokale maksimums- og minimumspunkter bestemmes ved at sætte $f'(x) = 0$ og løse den fremkomne ligning.

5. Asymptoter

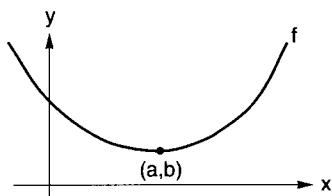
Er funktionsudtrykket formet som en brøk, skal der undersøges for asymptoter.

Lodret asymptote

- a. Bestem de x-værdier, der gør brøkens nævner lig med 0. Eks. $x = a$.
- b. Bestem grænseværdien for brøken, når $x \rightarrow a^+$ og $x \rightarrow a^-$.
- c. Hvis grænseværdien bliver plus-uendelig eller minus-uendelig, er linjen $x = a$ lodret asymptote.

Vandret asymptote

- a. Bestem grænseværdien for brøken, når $x \rightarrow \pm \infty$
- b. Hvis grænseværdien bliver en konstant. Eks. b, er linjen $y = b$ vandret asymptote.



Skrå asymptote

Hvis tællerens polynomium er en grad højere end nævnerens, kan en evt. skrå asymptote bestemmes således:

- a. Nævneren divideres op tælleren.
- b. I resultatet af denne division lader vi $x \rightarrow \pm \infty$.

Den skrå asymptote vil da kunne fremkomme som en ligning af formen $y = \alpha \cdot x + q$.

6. Vendepunkter

Vandret vendetangent vil forekomme, når for tegnsvariationen for $f'(x)$ er: "+ 0 +" eller "- 0 -".

7. Værdimængden

Har vi grafen for en funktion med minimum i (a,b) , vil værdimængden kunne beskrives således:

$$Vm(f) = [b; \infty[$$

INTEGRALREGNING

Integrale - stamfunktion - integrationsprøven

$$\int f(x) \, dx = F(x) + k, \text{ når } F'(x) = f(x)$$

Regneregler for integration

- sum

$$\int u(x) + v(x) \, dx = \int u(x) \, dx + \int v(x) \, dx$$

- differens

$$\int u(x) - v(x) \, dx = \int u(x) \, dx - \int v(x) \, dx$$

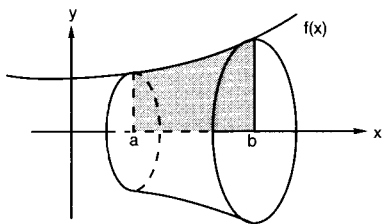
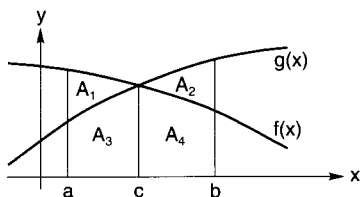
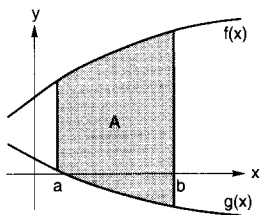
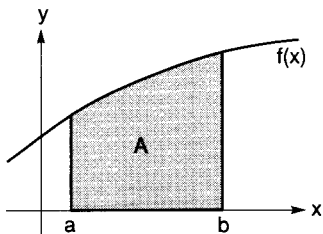
- partiel integration (delvis integration)

$$\int u(x) \cdot v(x) \, dx = U(x) \cdot v(x) - \int U(x) \cdot v'(x) \, dx$$

Stamfunktion til

- konstant
- potensfunktioner
- trigonometriske funktioner
- eksponentialfunktioner
- logaritmefunktioner

Funktion $f(x)$	Stamfunktion $F(x)$
k	$k \cdot x$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$x^{-1} = \frac{1}{x}$	$\ln x $
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln \cos x $
$\sin^2 x = (\sin x)^2$	$\frac{1}{2}(x - \sin x \cdot \cos x)$
$\cos^2 x = (\cos x)^2$	$\frac{1}{2}(x + \sin x \cdot \cos x)$
$1 + \tan^2 x$	$\tan x$
a^x	$a^x \frac{1}{\ln a }$
e^x	e^x
$\ln x$	$x \cdot \ln x - x$
$\log x$	$x \cdot \log x - \frac{x}{\ln 10}$



Bestemt integrale

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Areal-beregning

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

$$A_1 = \int_a^c (f(x) - g(x)) dx$$

$$A_2 = \int_c^b (g(x) - f(x)) dx$$

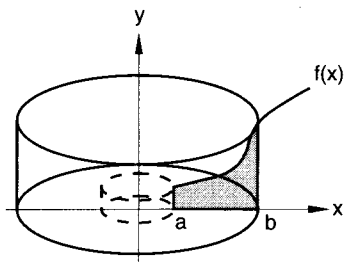
$$A_3 = \int_a^c g(x) dx$$

$$A_4 = \int_c^b f(x) dx$$

Rumfangsberegning

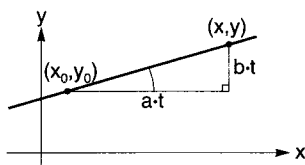
Rumfang af omdrejningslegeme fremkommer ved drejning 360° om x-aksen af det viste areal

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 dx$$



DIFFERENTIALLIGNING

VEKTORFUNKTIONER



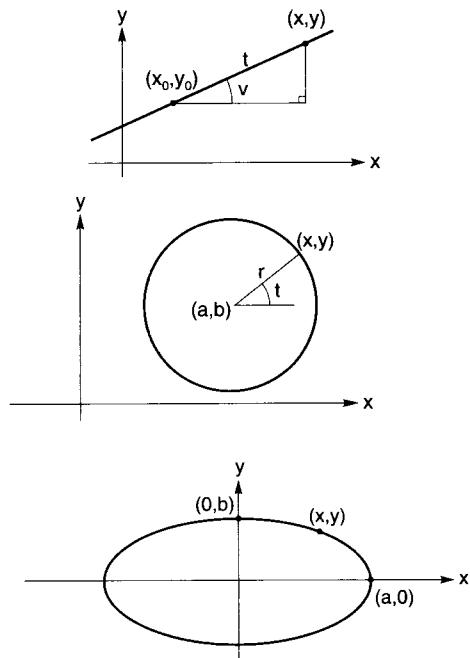
Rumfang af omdrejningslegeme fremkommet ved drejning 360° om y-aksen af det viste areal:

$$V_y = 2 \cdot \pi \cdot \int_a^b x \cdot f(x) dx$$

Ligningstype	Løsning
$y' = g(x)$	$y = \int g(x) dx$
$y' = k \cdot y$	$y = c \cdot e^{k \cdot x}$
$y' = g(y)$	$\int \frac{1}{g(y)} dy = x + k$
$y' = h(x) \cdot g(y)$	$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int h(x) dx$
$y' = y(b - ay)$	$y = \frac{\frac{b}{a}}{1 + ke^{-bx}}$
$y'' = g(x)$	$y' = \int g(x) dx,$ herefter som den første type

Ret linje

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + a \cdot t \\ y_0 + b \cdot t \end{pmatrix}$$



$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + t \cdot \cos v \\ y_0 + t \cdot \sin v \end{pmatrix}$$

Cirklen

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + r \cdot \cos t \\ b + r \cdot \sin t \end{pmatrix}$$

Ellipsen

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot \cos t \\ b \cdot \sin t \end{pmatrix}$$

Bevægelser

Banekurve givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Hastighedsvektor

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

Hastigheden

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

Accelerationsvektor

$$\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \vec{r}''(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$$

Matematiske tegn og symboler

Tegn	Anvendelse	Betydning, læsning
$\in$	$x \in A$	x tilhører mængden A, x er element i mængden A
$\notin$	$y \notin A$	y tilhører ikke mængden A, y er ikke element i mængden A
$\{ \}$	$\{ x \in A \mid p(x) \}$	mængden af elementer x tilhørende A, for hvilke udsagnet $p(x)$ er sandt
$\emptyset$		den tomme mængde
$\mathbb{N}$		mængden af naturlige tal og nul
$\mathbb{Z}$		mængden af hele tal
$\mathbb{Q}$		mængden af rationale tal
$\mathbb{R}$		mængden af reelle tal
$(,)$	(a,b)	ordnet par
$=$	$a = b$	a er lig med b
$\neq$	$a \neq b$	a er forskellig fra
$\approx$	$a \approx b$	a er tilnærmet lig med b
$<$	$a < b$	a er mindre end b
$>$	$a > b$	a er større end b
$\leq$	$a \leq b$	a er mindre end eller lig med b
$\geq$	$a \geq b$	a er større end eller lig med b
∞		uendelig
$+$	$a + b$	a plus b
$-$	$a - b$	a minus b

Tegn, anvendelse	Betydning, læsning	Bemærkninger og eksempler
$a \cdot b$ $a \times b$ ab	a multipliceret med b,	
$\frac{a}{b}$ a/b ab^{-1}	a divideret med b,	
a^p	a i potensen p,	
$a^{1/2}$ $a^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt{a}$	kvadratroden af a,	
$a^{1/n}$ $a^{\frac{1}{n}}$ $\sqrt[n]{a}$	den n-te rod af a,	
$ a $	absolutværdi af a, numerisk værdi af a,	
f	funktion f	En funktion f kan angives ved $x \rightarrow f(x)$ eller også ved $f(x)$.
$g \circ f$	den af f og g sammensatte funktion	$(g \circ f)(x) = g(f(x))$
$x \rightarrow a$	x går mod a,	
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	grænseværdi for f(x), når x går mod a	i stedet for $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ kan skrives $f(x) \rightarrow b$ for $x \rightarrow a$. Grænseværdier »fra højre« og »fra venstre« kan betegnes ved henholdsvis $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ og $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$
Δx	tilvækst af x,	
$\frac{df}{dx}$ df/dx f' Df	afledet af funktionen f af én variabel x	også $\frac{df(x)}{dx}$, $df(x)/dx$, $f'(x)$, $Df(x)$
$\frac{d^n f}{dx^n}$	den n-te afledede af funktionen f af én variabel x	For n=2 eller 3 bruges også f'' hhv. f''' i stedet for $f^{(n)}$.

Tegn, anvendelse	Betydning, læsning	Bemærkninger og eksempler
$\int f(x) dx$	et ubestemt integral (en stamfunktion) eller mængden af stamfunktioner af funktionen f ,	
$\int_a^b f(x) dx$	det bestemte integral af funktionen f fra a til b ,	
e	grundtallet for de naturlige logaritmer,	
e^x ; $\exp x$	eksponentialfunktionen (med grundtallet e) af x ,	
$\ln x$; $\log_e x$	naturlig logaritme af x ,	
$\lg x$; $\log_{10} x$	titalslogaritme af x ,	
π	forholdet mellem en cirkels perimeter og diameter,	
$\sin x$	sinus x ,	
$\cos x$	cosinus x ,	
$\tan x$	tangens x ,	
$\mathbf{a}$	vektor $\mathbf{a}$,	
a ; $ \mathbf{a} $	længde af vektor $\mathbf{a}$,	
$\mathbf{e}_a$	enhedsvektor i retning af $\mathbf{a}$,	
$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ $\mathbf{i}, \mathbf{j}$	enhedsvektorer i koordinataksernes retning,	
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	skalarprodukt af $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$,	